数理解析研究所講究録 1230 巻 2001 年 49-53

Free group factor 上の*-derivation(pre-generator)の構成について

水尾 勝 (Masaru Mizuo)
東北大・情報科学
(Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

概 要

Quantum lattice system あるいは一般の UHF 環上では相互作用する Hamiltonian から 1 パラメータ自己同型群の pre-generator を構成することができる. ここでは, 環を free group factor およびその dense C^*-subalgebra にした場合に non-trivial な pre-generator をどの様に構成するのかを議論する.

1 Introduction

$\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ を separable real Hilbert space, $N\equiv\dim\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, $[N]\equiv\{1,2,\cdots,N\}$ または $\{1,2,\cdots\}$ とし $\mathcal{H}$ をその複素化とする. $\mathcal{F}(\mathcal{H})\equiv\mathbb{C}\Phi\oplus\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}^{\otimes n}$ は full Fock space とし $\{e_i : i\in[N]\}$ を $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ の CONS とする. $f\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ に対して $a^*(f)\in\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ を creation operator,

$$a^*(f)e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\equiv f\otimes e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\ (n\geq 0, i_j\in[N](1\leq j\leq n))$$

$a(f)\equiv a^*(f)^*$ は annihilation operator とするとき,

$$\begin{aligned}a(f)e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_n} &= <f,e_{i_1}>e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\ (n\geq 1, i_j\in[N](1\leq j\leq n))\\ a(f)\Phi &= 0\end{aligned}$$

ただし $<\cdot,\cdot>$ は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ の内積. $s(f)\equiv a^*(f)+a(f)$ としたとき, ここで扱う作用素環は $\mathcal{M}\equiv\mathcal{M}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})\equiv\{s(f) : f\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}\}''$ および $\mathcal{A}\equiv C^*(\{1\}\cup\{s(f) : f\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}\})$ である. このとき真空 Φ は $\mathcal{M}$ 上 cyclic かつ separating vector になり, さらに $\tau(\cdot)\equiv\langle\cdot\Phi,\Phi\rangle$ とするとき τ は $\mathcal{M}$ 上 tracial にもなる. したがって $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ への $\mathcal{M}$ の恒等表現は standard representation になり, $\eta : \mathcal{M}\ni x\mapsto x\Phi\in\mathcal{F}(\mathcal{H})$ としたとき, $L_2(\mathcal{M},\tau)$ と $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ は η の閉包で同型になる.

$s(f)(\forall f\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ は τ に対して semicircular element で $\eta(s(f))=f(f\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ となるので, $s(f)(f\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ の全体は $L_2(\mathcal{M},\tau)$ で閉部分空間となりそこでは L_2 ノルムと C^* ノルムは同値になる. したがって $\mathcal{M}=\{s(e_i) : i\in[N]\}''$, $\mathcal{A}=C^*(\{1\}\cup\{s(e_i) : i\in[N]\})$ が分かる. ところが $\{s(e_i) : i\in[N]\}$ は τ に対して semicircular system すなわち互いに free relation(in the sense of free probability) にある standard semicircular element の族

になる. したがって $(\mathcal{M},\tau)\cong\star_N(L^\infty([-2,2],\mu_s),\int\cdot d\mu_s)\cong(\mathcal{L}(\mathbb{F}_N),<\cdot\delta_e,\delta_e>)$ および $(\mathcal{A},\tau)\cong\star_N(C^*([-2,2]),\int\cdot d\mu_s)$ となる. ただし μ_s は standard semicircular distribution で $\mathcal{L}(\mathbb{F}_N)$ は generator が N 個の free group factor である. また $\mathcal{A}$ は [3] の free product $C^*-algebra$ の simplicity の判定条件を用いると simple になることが分かる. また $\mathcal{P}\equiv\mathrm{Alg}(\{1\}\cup\{s(e_i):i\in[N]\})$ とするとき, faithful state による free product は代数的 free product の閉包になるので, $\mathcal{P}\cong\mathbb{C}\langle X_i:i\in[N]\rangle$ である. ただし $\mathbb{C}\langle X_i:i\in[N]\rangle$ は N 個の不定元の非可換多項式環.

2 $L_2(\mathcal{M},\tau)$ の調和解析

ここでまず $L_2(\mathcal{M},\tau)$ に Fourier 展開を導入する. 以下 $s_i\equiv s(e_i)(i\in[N])$ とする.

Definition 2.1 *$T_n(X)$ を n 次 $(n\geq 0)$ の第2種 Chebyshev 多項式 $(T_0(X)=1,T_1(X)=X$ および $T_{n+1}(X)\equiv XT_n(X)-T_{n-1}(X)$ で定まる) とするとき,*

$$T_{\underbrace{i_1i_1\cdots i_1}_{m_1}\underbrace{i_2i_2\cdots i_2}_{m_2}\cdots\underbrace{i_ni_n\cdots i_n}_{m_n}}\equiv T_{m_1}(s_{i_1})T_{m_2}(s_{i_2})\cdots T_{m_n}(s_{i_n})$$
$$(n\geq 0,i_j\in[N](1\leq j\leq n),m_j\geq 0(1\leq j\leq n))$$

このとき $\{T_{i_1i_2\cdots i_n}:n\geq 0,i_j\in[N](1\leq j\leq n)\}$ および $\{s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_n}:n\geq 0,i_j\in[N](1\leq j\leq n)\}$ は明らかに $\mathcal{P}$ の linear basis となるが, $\eta(T_{i_1i_2\cdots i_n})=e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}(n\geq 1,i_j\in[N](1\leq j\leq n))$ および $\eta(T_\emptyset)=\Phi$ となることが確認できるので $\{T_{i_1i_2\cdots i_n}:n\geq 0,i_j\in[N](1\leq j\leq n)\}$ は $L_2(\mathcal{M},\tau)$ の CONS となる. $L_2(\mathcal{M},\tau)\ni f$ に対して $f=\sum_{n\geq 0,i_j\in[N](1\leq j\leq n)}f_{i_1i_2\cdots i_n}T_{i_1i_2\cdots i_n}$ あるいは $f=\sum_{n=0}^\infty f_n(f_n\in P_n)$ を f の Fourier 展開と呼ぶ (実際これは Wiener-Ito 展開の free probability analog になっている). ただし P_n は $\{T_{i_1i_2\cdots i_n}:i_j\in[N](1\leq j\leq n)\}$ の生成する閉部分空間への projection である.

$T_\mathbb{R}:\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}\to\mathcal{H}_{\mathbb{R},2}$ を contraction とし, $T:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ はその複素化, さらに $\mathcal{F}(T_\mathbb{R}):\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)\to\mathcal{F}(\mathcal{H}_2)$ を,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T_\mathbb{R})e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}&\equiv Te_{i_1}\otimes Te_{i_2}\otimes\cdots\otimes Te_{i_n}\ (n\geq 1,i_j\in[N](1\leq j\leq n))\\ \mathcal{F}(T_\mathbb{R})\Phi&\equiv\Phi\end{aligned}$$

で定義するとき $\mathcal{F}(T_\mathbb{R})$ も contraction である. さらに $\Gamma(T_\mathbb{R}):\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R},1})\equiv\mathcal{M}(\mathcal{H}_{\mathbb{R},1})\to\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R},2})\equiv\mathcal{M}(\mathcal{H}_{\mathbb{R},2})$,

$$\Gamma(T_\mathbb{R})x\equiv\mathcal{F}(T_\mathbb{R})x\mathcal{F}(T_\mathbb{R})^*(x\in\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R},1})))$$

は τ preserving normal complete positive map になることが知られている ([6]). このとき Γ は (real Hilbert space, contraction) のカテゴリから (free group factor, τ preserving normal complete positive map) のカテゴリへの functor になる. これは Voiculescu の free Γ functor と呼ばれる. このときさらに $T_{\mathbb{R},i}$ が $T_\mathbb{R}$ にノルム収束するとき $\Gamma(T_{\mathbb{R},i})$ は $\Gamma(T_\mathbb{R})$ に point-σ weak 収束する. したがって $\Gamma(\exp^{-t}1)(t\geq 0)$ は $\mathcal{M}$ 上の τ preserving normal complete positive semigroup を与える (実際これは Ornstein-Uhlenbeck semigroup の free probability analogになっている). さらに$\Gamma(\exp^{-t}1)(t \geq 0)$を$L_2(\mathcal{M},\tau)$ 上に拡張した場合を$\overline{\Gamma(\exp^{-t}1)}$と記すと ($L_2(\mathcal{M},\tau)$ と$\mathcal{F}(\mathcal{H})$をηで同一視すれば$\overline{\Gamma(\exp^{-t}1)}$=$\mathcal{F}(\exp^{-t}1)$となるので) 先の Fourier 展開を使って spectral 表示すると,

$$\overline{\Gamma(\exp^{-t}1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp^{-nt} P_n$$

したがってその generator Lは,

$$L = \frac{d\overline{\Gamma(\exp^{-t}1)}}{dt}|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} -nP_n$$

で Laplacian の機能をする. ここで次の Sobolev 不等式型の定理 ([1]) が証明されている.

Fact 2.2 $f \in L_2(\mathcal{M},\tau)$ のとき,

$$\|\Gamma(\exp^{-t}1)f\|_2 \leq \|\Gamma(\exp^{-t}1)f\|_\infty \leq t^{-\frac{3}{2}}\|f\|_2$$

3 Generatorの構成

ここでは$\mathcal{M}$上の*-derivation δで dom $\delta = \mathcal{P}$ となるものを考察する. UHF 環では dense な行列環の代数的 inductive limit に定義域を持つ derivation を normal derivation と呼ぶ. 上述した full Fock space による構成を antisymmetric Fock space に変えた場合に対応するC^*環は2^∞の UHF 環となるが両者の構成の対応を見ることでここで考察する型の derivation が normal derivation の free analog になっていることが分かる. ただし AF 環の normal *-derivation は approximate inner *-derivation になることがすぐ分かり ([5]), approximate inner *-derivation は closable でその closure が generator になり, さらに生成される one-parameter action は approximate inner automorphisim であることも知られている ([5]). 我々の場合$\mathcal{P}$を定義域とする*-derivation の approximate innerness が不明なので, ここで議論するのはこの型の*-derivation が pre-generator となるための十分条件ということになる.

このとき$\mathcal{P}$は非可換多項式環と同型なので写像$A : \{s_i : i \in [N]\} \to \mathcal{M}$あるいは$\mathcal{A}$が指定されたときに derivation δ_A $s.t.$ $\delta_A(s_i) = A(s_i)(i \in [N])$ は一意的に確定する. さらにδ_Aが*-derivation となるための必要十分条件は明らかに$A : \{s_i : i \in [N]\} \to \mathcal{M}^{sa}$である. ただし$\mathcal{M}^{sa}$は selfadjoint 元の全体. ここで$A$の定める写像を Fourier 展開で記述して$A(e_i) = \sum_{n\geq 0, j_k\in[N](1\leq k\leq n)} a_{ij_1j_2\cdots j_n}T_{j_1j_2\cdots j_n}(i \in [N])$とする. したがって問題は$\{a_{ij_1j_2\cdots j_n} : i \in [N], n \geq 0, j_k \in [N](1 \leq k \leq n)\}$に如何なる条件を与えたときに$\delta_A$が pre-generator となるかを議論することになる.

Remark 3.1 *Fact 2.2*を使うと, $L_2(\mathcal{M},\tau) \ni f = \sum_{n\geq 0, i_j\in[N](1\leq j\leq n)} f_{i_1i_2\cdots i_n}T_{i_1i_2\cdots i_n}$に対して$\exists t$ $\sum_{n\geq 0, i_j\in[N](1\leq j\leq n)} e^{nt}|f_{i_1i_2\cdots i_n}|^2 < \infty$のとき$f \in \mathcal{A}$がいえる. すなわち*Fourier*展開係数が急激に小さくなる元は連続関数であることが言える. したがって (条件 *I*)

1. $\forall i$ $\exists t_i$ $\sum_{n\geq 0, j_k\in[N](1\leq k\leq n)} e^{nt_i}|a_{ij_1j_2\cdots j_n}|^2 < \infty$

2. $\underline{a_{ij_1j_2\cdots j_n} = a_{ij_nj_{n-1}\cdots j_1}\ (i \in [N], n \geq 0, j_k \in [N](1 \leq k \leq n))}$

のとき δ_A は $\mathcal{M}$ 上あるいは $\mathcal{A}$ 上の **-derivation* として定義できる.

Proposition 3.2 δ_A が条件 *I* を満たす **-derivation* とする. さらに *(条件 II)*

$$\underline{a_{i_1i_2\cdots i_n} + a_{i_2i_3\cdots i_ni_1} + a_{i_3i_4\cdots i_1i_2} + \cdots + a_{i_ni_1\cdots i_{n-1}} = 0\ (n \geq 0, i_j \in [N](1 \leq j \leq n))}$$

のとき $\tau(\delta_A(x)) = 0(\forall x \in \mathrm{dom}\ \delta_A)$.

C^* 環あるいは W^* 環上の*-derivation が faithful state を preserve するとそれぞれ closable あるいは σ-weak closable となることが知られている ([5]) のでこの Proposition の条件下で δ_A は closable になる. この Proposition の証明のために Lemma を準備する. $T_{i_1i_2\cdots i_l}, T_{j_1j_2\cdots j_m}, \cdots, T_{k_1k_2\cdots k_n}$ が与えられたとき次のようなラベル $i_1, i_2, \ldots, k_n$ とブロック | のついた集合を準備する.

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccccc} \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & | & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & | & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_l & & j_1 & j_2 & \cdots & j_m & & k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{array}\right\}$$

このときこの集合の pair partition(2 個づつの分割) が異なるブロックの元を pair にしていてかつ同じラベルの元を pair にしている場合に適合しているとよぶことにする.

Lemma 3.3 $\tau(T_{i_1i_2\cdots i_l} \cdot T_{j_1j_2\cdots j_m} \cdots T_{k_1k_2\cdots k_n})$ は上記の集合上の適合した *pair partition* の総数に等しい.

proof of Proposition 3.2 アルファベット $[N]$ の生成する free monoid を $[N]^*$ としたとき, $[N]^*$ に次の同値関係をいれる. 単語 $i_1i_2\cdots i_l, j_1j_2\cdots j_m \in [N]^*$ はある $n \leq l$ が存在して, $i_ni_{n+1}\cdots i_li_1\cdots i_{n-1} = j_1j_2\cdots j_m$ となるとき同値であるとする. この同値による同値類集合を $cong([N]^*)$ と書くことにする. このとき $[i_1i_2\cdots i_n] \in cong([N]^*)$ に対して $a_{[i_1i_2\cdots i_n]} = a_{i_1i_2\cdots i_n} + a_{i_2i_3\cdots i_ni_1} + a_{i_3i_4\cdots i_1i_2} + \cdots + a_{i_ni_1\cdots i_{n-1}}$ と記す. このとき Lemma 3.3 を用いると, 条件 I のもとでは任意の $f \in \mathcal{P}$ に対して,

$$\tau(\delta_A(f)) = \sum_{w \in cong([N]^*)} a_w c_{w,f}$$

となることがいえる. ただし $\sum_{w \in cong([N]^*)}$ は絶対収束する和で $c_{w,f} \in \mathbb{C}$ は w, f によって定まる定数. したがって条件 II が Proposition の十分条件であることは明らか. □

Proposition 3.4 δ_A を条件 *I,II* を満たすとする. さらに

1. $a_{ij_1j_2\cdots j_n} = 0\ (n \geq 3, i \in [N], j_k \in [N](1 \leq k \leq n))$
2. $\sup_{n\geq 0, i\in[N], j_k\in[N](1\leq k\leq n)} |a_{ij_1j_2\cdots j_n}| < \infty$
3. $\sum_{n\geq 0, j_k\in[N](1\leq k\leq n)} \mathrm{sign}(|a_{ij_1j_2\cdots j_n}|)$ が i に対して一様有界.

を満たすとき δ_A は *pre-generator* である. 特に $N < \infty$ のときは *1.* を仮定するだけで

証明は定義域$\mathcal{P}$の全ての元がanalytic element(in the sense of Yoshida-Hill semigroup)であることを直接確認する.

Example 3.5 dim $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}=3$とし$A(e_1)=-2e_2\otimes e_3-2e_3\otimes e_2$, $A(e_2)=e_3\otimes e_1+e_1\otimes e_3$, $A(e_3)=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1$のとき$\delta_A$は*closable *-derivation*で*pre-generator. Faithful state* τを*preserve*する**-derivation*が有界であるとき$L_2(\mathcal{M},\tau)$有界にもなることが知られている*([5])*. 上記の例は$L_2(\mathcal{M},\tau)$有界でないことが確認できるので*non-inner*であることが分かる.

参考文献

[1] M. Bożejko, *Ultracontractivity and Strong Sobolev Inequality for q-Ornstein-Uhlenbeck Semigroup(-1<q<1)*, preprint.

[2] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Oprator Algebras and Statistical Mechanics*, Vol.I(1979), Vol.II(1981), Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[3] K.J. Dykema, *Simplicity and the stable rank of some free product C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 351(1999),1-40.

[4] F. Hiai and D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol.77, Amer. Math. Soc., 2000.

[5] S. Sakai, *Operator Algebras in Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathmatics and its Applications, Vol.41, Cambrige University Press, 1991.

[6] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema and A. Nica, *Free Random Variables*, CRM Monograph Ser., Vol.1, Amer. Math. Soc., 1992.